Clase práctica: Formas cuadráticas

1. Dada $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = -4x_1x_2 + 3x_2^2$.

   a) Expresar a la forma cuadrática como $x^T Ax$ con $A \in Sim_2(\mathbb{R})$, diagonalizar ortogonalmente $A = P\Lambda P^T$ y, mediante un cambio de variables $x = Py$, escribir la forma cuadrática sin términos cruzados.

   b) Clasificar la forma cuadrática y graficar sus conjuntos de nivel $N_c(Q)$.

   c) Hallar $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x)$ y $\min\limits_{\|x\|=1} Q(x)$ y los vectores en los cuales se alcanzan.

   d) Hallar los puntos de la curva de nivel 1 a menor distancia del origen. ¿Existen puntos que estén a distancia máxima?

   a) Vemos que a la forma cuadrática $Q(x) = -4x_1x_2 + 3x_2^2$ la podemos escribir como $Q(x) = x^T Ax$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
   Los autovalores de A son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$ y los autoespacios son

   $$S_{-1} = gen\{(2\ 1)^T\} \quad y \quad S_4 = gen\{(-1\ 2)^T\}$$

   La matriz A se diagonaliza ortogonalmente, siendo $A = P\Lambda P^T$, con

   $$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   Observación: El determinante de la matriz P es igual a 1, así que P es la matriz de una rotación.
   Si realizamos el cambio de variables $x = Py$ nos queda

   $$Q(x) = (Py)^T A(Py) = y^T (P^T AP)y = y^T \Lambda y = \tilde{Q}(y)$$

   donde

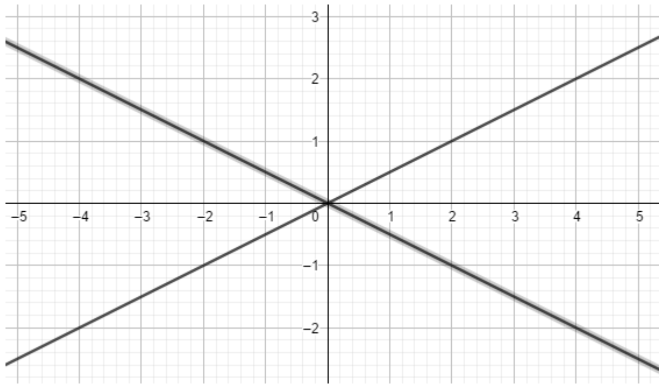
   $$\tilde{Q}(y) = (y_1\ y_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -y_1^2 + 4y_2^2$$

   b) Como uno de los autovalores de A es positivo y el otro es negativo, la forma cuadrática es indefinida.
   Veamos cuales son los conjuntos de nivel. Primero veremos los conjuntos de nivel de la forma cuadrática sin productos cruzados

   $$N_c(\tilde{Q}) = \{y \in \mathbb{R}^2 /\ \tilde{Q}(y) = c\} = \{y \in \mathbb{R}^2 /\ -y_1^2 + 4y_2^2 = c\}$$

   - Si $c = 0$ nos queda

   $$-y_1^2 + 4y_2^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_2^2 = \frac{1}{4}y_1^2 \quad \Leftrightarrow \quad y_2 = \frac{1}{2}y_1 \quad o \quad y_2 = -\frac{1}{2}y_1$$

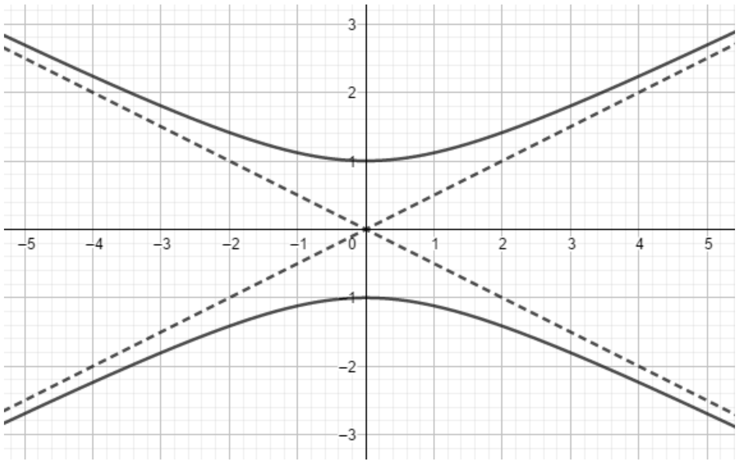


- Si $c > 0$, nos quedan hipérbolas

$$-\frac{y_1^2}{c} + \frac{y_2^2}{\frac{c}{4}} = 1$$

que cortan al eje y_2 en los puntos $(0, \frac{\sqrt{c}}{2})$ y $(0, -\frac{\sqrt{c}}{2})$ y sus asíntotas son $y_2 = \frac{1}{2}y_1$ e $y_2 = -\frac{1}{2}y_1$.

Por ejemplo, si $c = 4$ nos queda la hipérbola $-\frac{y_1^2}{4} + y_2^2 = 1$.

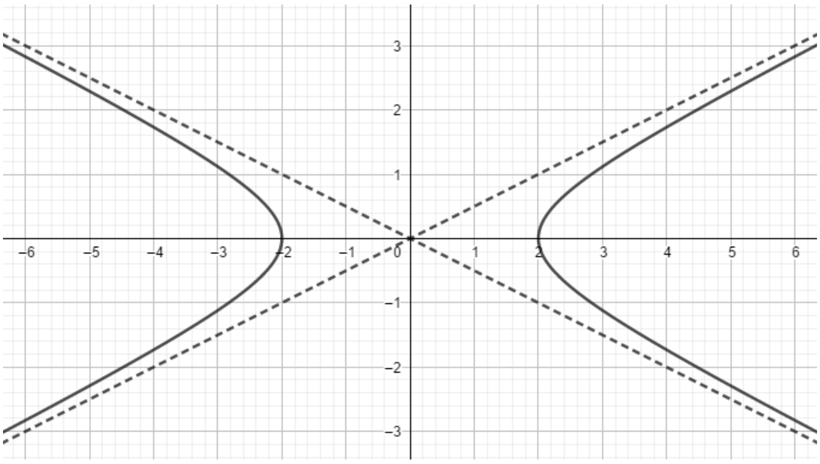


- Si $c < 0$, $c = -a$, con $a > 0$, nos quedan hipérbolas

$$\frac{y_1^2}{a} - \frac{y_2^2}{\frac{a}{4}} = 1$$

que cortan al eje y_1 en los puntos $(\sqrt{a}, 0)$ y $(-\sqrt{a}, 0)$ y sus asíntotas son $y_2 = \frac{1}{2}y_1$ e $y_2 = -\frac{1}{2}y_1$.

Por ejemplo, si $c = -4$ nos queda la hipérbola $\frac{y_1^2}{4} - y_2^2 = 1$.



Ahora veamos cuales son los conjuntos de nivel de Q

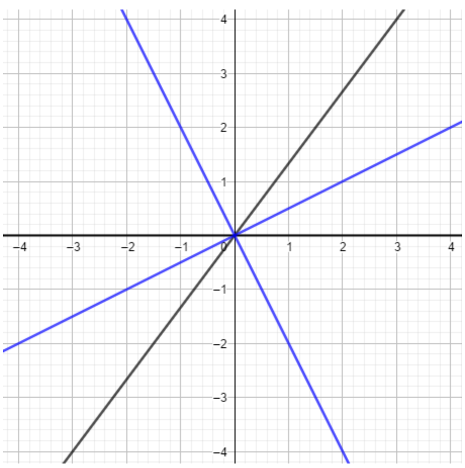
$$N_c(Q) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \, Q(x) = c\}$$

Para ello tendremos en cuenta los conjuntos de nivel de $\tilde{Q}$ y que hicimos un cambio de variables $x = Py$, donde P es la matriz de una rotación. Observemos que:

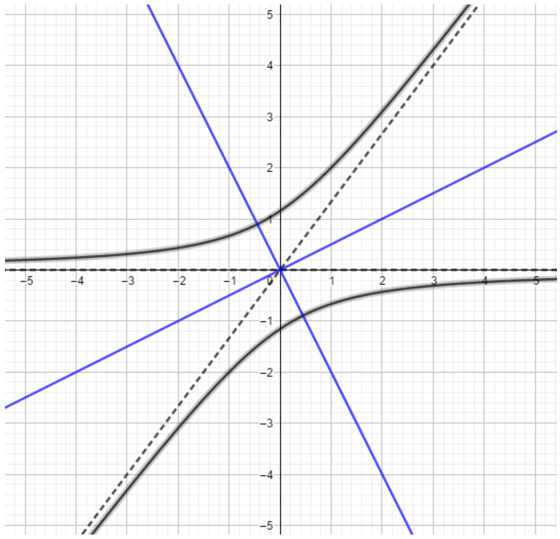
- $Pe_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces al rotar el eje y_1 obtenemos la recta de dirección $v_1 = (2\ 1)^T$ en los ejes x_1, x_2.
- $Pe_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Entonces al rotar el eje y_2 obtenemos la recta de dirección $v_2 = (-1\ 2)^T$ en los ejes x_1, x_2.
- $P \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Entonces al rotar la asíntota de ecuación $y_2 = \frac{1}{2} y_1$ nos queda la recta de dirección $(3\ 4)^T$ que pasa por el origen, o sea, la recta $x_2 = \frac{4}{3} x_1$.
- $P \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces al rotar la asíntota de ecuación $y_2 = -\frac{1}{2} y_1$ nos queda el eje x_1.

Veamos entonces como nos quedan los conjuntos de nivel:

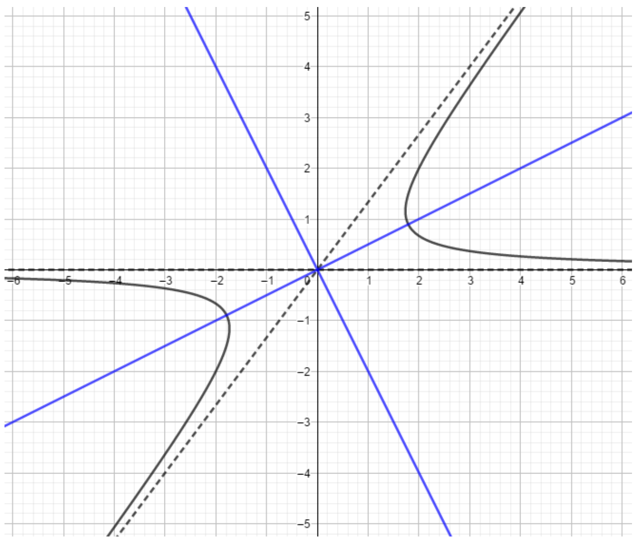
- Si $c = 0$ ya vimos que el conjunto de nivel $N_0(Q)$ está formado por las rectas $x_2 = \frac{4}{3} x_1$ y $x_2 = 0$.



- Si $c > 0$, nos quedan las hipérbolas que obtuvimos antes rotadas. Estas hipérbolas tienen asíntotas $x_2 = \frac{4}{3}x_1$ y $x_2 = 0$ y cortan a la recta de dirección $(-1\ 2)^T$. Por ejemplo, para $c = 4$ nos queda



- Si $c < 0$, nos quedan las hipérbolas que obtuvimos antes rotadas. Estas hipérbolas tienen asíntotas $x_2 = \frac{4}{3}x_1$ y $x_2 = 0$ y cortan a la recta de dirección $(2\ 1)^T$. Por ejemplo, para $c = -4$ nos queda



c) Vamos a calcular $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x)$ y $\min\limits_{\|x\|=1} Q(x)$ y los vectores en los cuales se alcanzan.

Observemos que para $\tilde{Q}(y) = -y_1^2 + 4y_2^2$ tenemos que

$$-\|y\|^2 = -y_1^2 - y_2^2 \leq \tilde{Q}(y) \leq 4y_1^2 + 4y_2^2 = 4\|y\|^2$$

Como $\|x\| = \|Py\| = \|y\|$, nos queda que

$$-\|x\|^2 \leq Q(x) \leq 4\|x\|^2$$

Entonces, para $\|x\| = 1$, tenemos que

$$-1 \leq Q(x) \leq 4$$

$$\max_{\|x\|=1} Q(x) = 4 \quad y \quad \min_{\|x\|=1} Q(x) = -1$$

El máximo se obtiene en los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $\|x\| = 1$ y $Q(x) = \tilde{Q}(y) = 4$. Para ésto es necesario que

$$\|y\| = 1 \quad y \quad \tilde{Q}(y) = -y_1^2 + 4y_2^2 = 4y_1^2 + 4y_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 0 \quad y \quad |y_2| = 1$$

Luego,

$$y = (0\ 1)^T, \quad y = (0\ -1)^T$$

$$x = P(0\ 1)^T = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1\ 2)^T, \quad x = P(0\ -1)^T = -\frac{1}{\sqrt{5}}(-1\ 2)^T$$

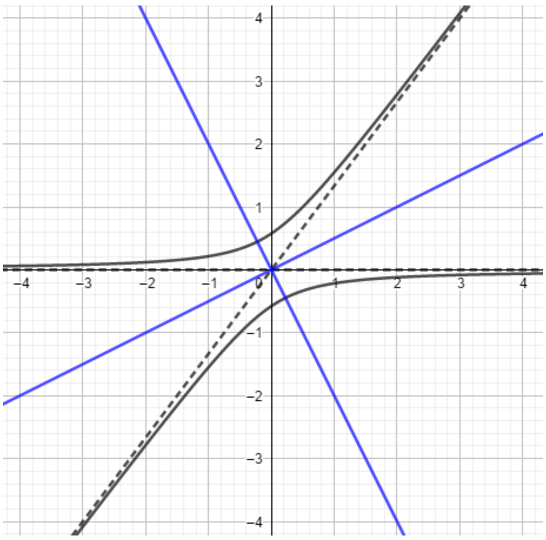
O sea, el máximo se alcanza en los autovectores asociados al autovalor máximo de norma 1.

Análogamente, el mínimo se alcanza en los autovectores asociados al mínimo autovalor de norma 1. Ésto es, el mínimo se alcanza en

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\ 1)^T, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{5}}(2\ 1)^T$$

d) Vamos a hallar los puntos de la curva de nivel 1 a menor distancia del origen.

Podemos pensarlo geométricamente. Por lo que vimos antes, la curva de nivel 1 es una hipérbola.



Los puntos del la hipérbola a menor distancia del origen son de la forma $x = k(-1\ 2)^T$ (autovectores asociados al autovalor 4) que verifican $Q(x) = 1$. Entonces

$$Q(x) = Q(-k\ 2k) = -4(-k)(2k) + 3(2k)^2 = 20k^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |k| = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Los puntos resultan

$$x = \frac{1}{2\sqrt{5}}(-1\ 2)^T, \quad x = -\frac{1}{2\sqrt{5}}(-1\ 2)^T$$

Otra manera de pensarlo es la siguiente. Vimos que

$$-\|x\|^2 \leq Q(x) \leq 4\|x\|^2$$

Para los x tales que $Q(x) = 1$ tenemos que

$$1 \leq 4\|x\|^2$$

O sea,

$$\|x\|^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$\|x\| \geq \frac{1}{2}$$

Luego, la mínima distancia es $\frac{1}{2}$ y los puntos de la hipérbola que están a esta distancia son los $x = k(-1\ 2)^T$ de norma $\frac{1}{2}$.

$$\|x\| = \left\|k(-1\ 2)^T\right\| = |k|\,\left\|(-1\ 2)^T\right\| = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |k| = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Los puntos resultan, al igual que lo que vimos antes,

$$x = \frac{1}{2\sqrt{5}}(-1\ 2)^T, \quad x = -\frac{1}{2\sqrt{5}}(-1\ 2)^T$$

En este caso no existen puntos que estén a distancia máxima del origen ya que la hipérbola no está acotada.

2. Dada $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

   a) Expresar a la forma cuadrática como x^TAx con $A \in Sim_3(\mathbb{R})$, diagonalizar ortogonalmente $A = P\Lambda P^T$ y, mediante un cambio de variables $x = Py$, escribir la forma cuadrática sin términos cruzados. ¿Cuáles son los ejes principales de Q?

   b) Clasificar la forma cuadrática y caracterizar geométricamente sus conjuntos de nivel $N_c(Q)$. Graficarlos en el sistema cartesiano definido por los ejes principales de Q.

   c) A simple visa, determinar los puntos de la superficie de nivel $N_3(Q)$ más cercanos al origen e indicar a qué distancia se encuentran del mismo.

   d) Hallar $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x)$ y $\min\limits_{\|x\|=1} Q(x)$ y los vectores en los cuales se alcanzan.

   a) Vemos que a la forma cuadrática $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ la podemos escribir como $Q(x) = x^TAx$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Los autovalores de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 0$ y los autoespacios son

$$S_3 = gen\{(1\ -1\ 0)^T, (1\ 1\ -2)^T\} \quad y \quad S_0 = gen\{(1\ 1\ 1)^T\}$$

   La matriz A se diagonaliza ortogonalmente, siendo $A = P\Lambda P^T$, con

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad y \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Observación: El determinante de la matriz P es igual a 1, así que P es la matriz de una rotación. En este caso el eje de rotación es la recta generada por $\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ -1\ 0)^T$ (los autovectores de P asociados al autovalor 1).

   Si realizamos el cambio de variables $x = Py$ nos queda

$$Q(x) = (Py)^TA(Py) = y^T(P^TAP)y = y^T\Lambda y = \tilde{Q}(y)$$

donde

$$\tilde{Q}(y) = (y_1\ y_2\ y_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 3y_1^2 + 3y_2^2$$

Los ejes principales de la forma cuadrática son las rectas generadas por las columnas de la matriz P.

$b)$ Como dos de los autovalores de A son positivos y el otro es nulo, la forma cuadrática es semidefinida positiva.

Veamos cuales son los conjuntos de nivel. Primero veremos los conjuntos de nivel de la forma cuadrática sin productos cruzados

$$N_c(\tilde{Q}) = \{y \in \mathbb{R}^3 /\ \tilde{Q}(y) = c\} = \{y \in \mathbb{R}^3 /\ 3y_1^2 + 3y_2^2 = c\}$$

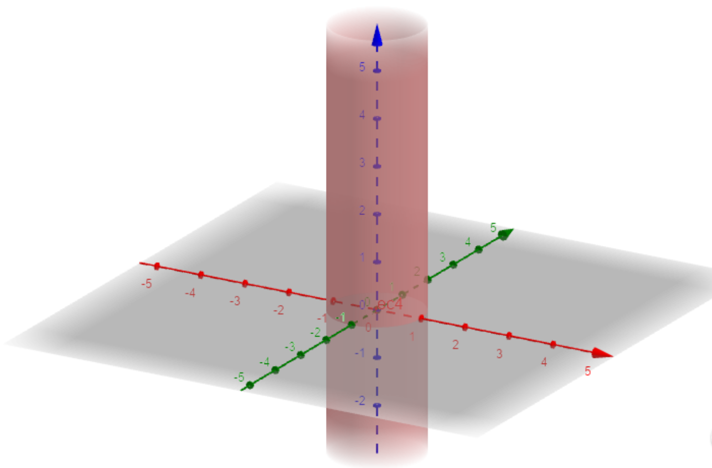
- Si $c < 0$, el conjunto de nivel es vacío.
- Si $c = 0$, tenemos que

$$3y_1^2 + 3y_2^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 \in \mathbb{R}$$

  Así que el conjunto de nivel es el eje y_3.
- Si $c > 0$, tenemos que

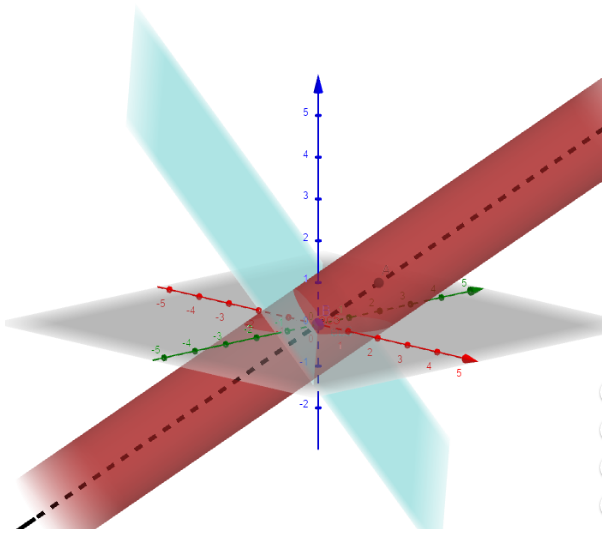
$$3y_1^2 + 3y_2^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad y_1^2 + y_2^2 = \frac{c}{3},\ y_3 \in \mathbb{R}$$

  Así que los conjuntos de nivel son cilindros de eje y_3.
  Por ejemplo, para $c = 3$ el conjunto de nivel es el cilindro que se muestra en la figura.



Cuando pasamos a coordenadas x, nos queda que:

- El eje y_3 se transforma en la recta de dirección $(1\ 1\ 1)^T$ ya que $Pe_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^T$.
  Luego $N_0(Q) = gen\{(1\ 1\ 1)^T\}$.
- El plano $y_3 = 0$ se transforma en el plano $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 /\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
- Los conjuntos de nivel $c > 0$, son cilindros con eje la recta $N_0(Q) = gen\{(1\ 1\ 1)^T\}$.
  Por ejemplo, si $c = 3$ nos queda el cilindro que se muestra en la figura:



c) Los puntos del conjunto de nivel 3 más cercanos al origen son los puntos que se encuentran en la intersección entre el cilindro y el plano de ecuación $x_1+x_2+x_3=0$. Estos puntos se encuentran a distancia 1 del origen.

d) Tenemos que los máximos y mínimos son

$$\max_{\|x\|=1} Q(x) = 3 \quad y \quad \min_{\|x\|=1} Q(x) = 0$$

El máximo se obtiene en los autovectores asociados al autovalor 3 de norma 1. Estos vectores son de la forma

$$x = \alpha(\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0)^T + \beta(\frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ -\frac{2}{\sqrt{6}})^T, \quad \alpha^2+\beta^2=1$$

El mínimo se obtiene en los autovalores asociados al autovalor 0 de norma 1. Estos vectores son

$$x = (\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}})^T, \quad x = (-\frac{1}{\sqrt{3}}\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\ -\frac{1}{\sqrt{3}})^T$$

3. Dada $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x^TAx$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Hallar $\max\limits_{\|x\|=2} Q(x)$ y $\min\limits_{\|x\|=2} Q(x)$ y los vectores en los cuales se alcanzan.

b) Caracterizar geométricamente el conjunto de nivel $N_6(Q)$ y hallar los puntos de $N_6(Q)$ cuya distancia al origen sea mínima y aquellos cuya distancia al origen sea máxima. ¿Qué valores tienen estas distancias?

c) Hallar el máximo y el mínimo de la forma cuadrática $R(x) = \|x\|^2$ sujeta a la restricción $Q(x)=1$ y determinar los vectores que los realizan.

a) Los autovalores de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$ y los autoespacios son

$$S_1 = gen\{(1\ 1\ 0)^T\}, \quad S_2 = gen\{(0\ 0\ 1)^T\} \quad y \quad S_3 = gen\{(1\ -1\ 0)^T\}$$

La matriz A se diagonaliza ortogonalmente, siendo $A = P\Lambda P^T$, con

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sabemos que

$$\|x\|^2 \leq Q(x) \leq 3\,\|x\|^2$$

Entonces

$$\max_{\|x\|=2} Q(x) = 12 \quad y \quad \min_{\|x\|=2} Q(x) = 4$$

El máximo se realiza en los autovectores asociados al autovalor 3 de norma 2:

$$x = (\sqrt{2}\ -\sqrt{2}\ 0)^T, \quad x = (-\sqrt{2}\ \sqrt{2}\ 0)^T$$

El mínimo se realiza en los autovectores asociados al autovalor 1 de norma 2:

$$x = (\sqrt{2}\ \sqrt{2}\ 0)^T, \quad x = (-\sqrt{2}\ -\sqrt{2}\ 0)^T$$

b) El conjunto de nivel 6 es

$$N_6(Q) = \{x \in \mathbb{R}^3 /\ Q(x) = 6\}$$

Para saber que objeto geométrico es nos conviene hacer un cambio de variables para hallar la forma cuadrática sin producto cruzado. Si realizamos el cambio de variables $x = Py$ nos queda

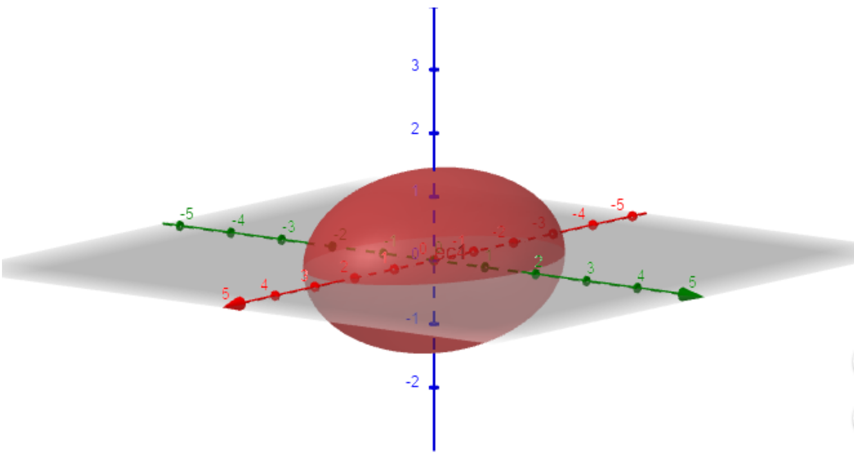
$$Q(x) = (Py)^T A(Py) = y^T(P^T AP)y = y^T \Lambda y = \tilde{Q}(y)$$

donde

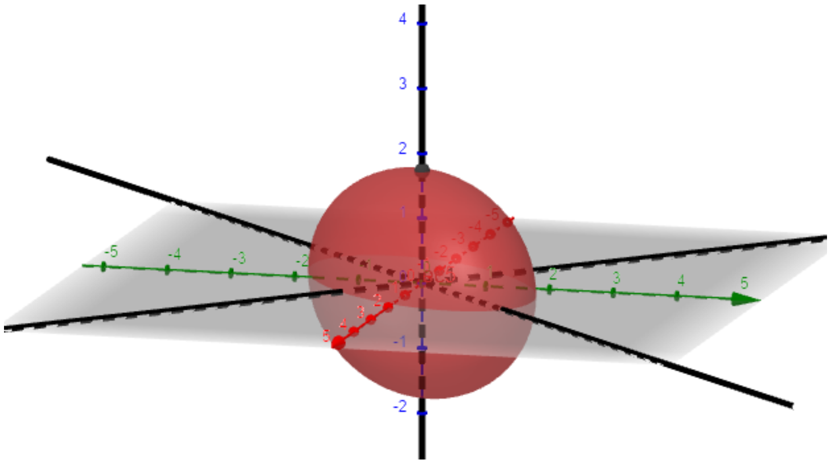
$$\tilde{Q}(y) = (y_1\ y_2\ y_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} = y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2$$

$$\tilde{Q}(y) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_1^2}{6} + \frac{y_2^2}{3} + \frac{y_3^2}{2} = 1$$

El conjunto de nivel 6 es un elipsoide.



Al volver a la variable x nos queda:



En coordenadas y podemos ver que los puntos a mayor distancia al origen son $(\sqrt{6}\ 0\ 0)^T$ y $(-\sqrt{6}\ 0\ 0)^T$ a distancia $\sqrt{6}$ y los puntos a menor distancia son $(0\ 0\ \sqrt{2})^T$ y $(0\ 0\ -\sqrt{2})^T$ a distancia $\sqrt{2}$.

Volviendo a variable x nos queda que los puntos a mayor distancia al origen son $\sqrt{6}(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0)^T$ y $-\sqrt{6}(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0)^T$. Estos puntos están a distancia $\sqrt{6}$ del origen. Los puntos a menor distancia al origen son $\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0)^T = (1\ -1\ 0)^T$ y $-\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0)^T = (-1\ 1\ 0)^T$. Estos puntos están a distancia $\sqrt{2}$ del origen.

$c)$ Para hallar el máximo y el mínimo de la forma cuadrática $R(x) = \|x\|^2$ sujeta a la restricción $Q(x) = 1$, podemos proceder como en el punto anterior ya que lo que tenemos que encontrar es el valor máximo y el valor mínimo del cuadrado de la distancia al origen de los puntos que se encuentran sobre el conjunto de nivel 1. Otra forma, que también podríamos haber utilizado en el item anterior, es la siguiente.

Sabemos que

$$\|x\|^2 \leq Q(x) \leq 3\,\|x\|^2$$

Entonces, para $x \neq (0\ 0\ 0)^T$, tenemos que

$$1 \leq \frac{Q(x)}{\|x\|^2} \leq 3$$

Luego,

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\|x\|^2}{Q(x)} \leq 1$$

De esta desigualdad obtenemos que

$$\max_{Q(x)=1} \|x\|^2 = 1 \quad y \quad \min_{Q(x)=1} \|x\|^2 = \frac{1}{3}$$

El máximo se obtiene en los autovectores de A asociados al autovalor 1 de norma 1, ésto es, para

$$x = (\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ 0)^T, \quad x = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ 0)^T$$

El mínimo se obtiene en los autovectores de A asociados al autovalor 3 de norma $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ésto es, para

$$x = (\frac{1}{\sqrt{6}}\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\ 0)^T, \quad x = (-\frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ 0)^T$$

4. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x) = 2\|x\|^2 - \|P_{S^\perp}x\|^2$ con $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ ($P_{S^\perp}$matriz de proyección ortogonal en base canónica)

   a) Probar que Q es una forma cuadrática definida positiva.

   b) Hallar $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x)$ y el conjunto de vectores en los que se alcanza tal extremo.

a) $Q(x) = 2\|x\|^2 - \|P_{S^\perp}x\|^2 = 2x^Tx - (P_{S^\perp}x)^T P_{S^\perp}x =$

$$= 2x^Tx - x^T P_{S^\perp}^T P_{S^\perp}x \underset{\text{mat proyeccion}}{=} 2x^Tx - x^T P_{S^\perp}x = x^T(2I - P_{S^\perp})x$$

la matriz $2I - P_{S^\perp}$ es simétrica por lo tanto $Q(x)$ así definida es una forma cuadrática.
Veamos sus autovectores y autovalores:

si $v \in S \longrightarrow (2I - P_{S^\perp})v = 2v - P_{S^\perp}v = 2v - \mathbf{0} = 2v \longrightarrow$ v es autovector de $2I - P_{S^\perp}$

si $v \in S^\perp \longrightarrow (2I - P_{S^\perp})v = 2v - P_{S^\perp}v = 2v - v = v \longrightarrow$ v es autovector de $2I - P_{S^\perp}$

Podemos concluir que: si $\{v_1; v_2\}$ es BON de S y $\{v_3\}$ es BON de $S^\perp$ entonces

$S_{\lambda_1=2} = \text{gen}\{v_1; v_2\}$ y $S_{\lambda_2=1} = \text{gen}\{v_3\}$

como los autovalores λ_1 y λ_2 son positivos la forma cuadrática es definida positiva.

b) $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x) = 2$ y se realiza en $\{x \in \mathbb{R}^3 : av_1 + bv_2 \text{ con } a^2 + b^2 = 1\}$

(si $x = av_1 + bv_2$, $\|x\|^2 = \|av_1 + bv_2\|^2 \underset{\text{Pitágoras}}{=} a^2\|v_1\|^2 + b^2\|v_2\|^2 = a^2 + b^2 = 1$)

$v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1\ -1\ 0)^T v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1\ 1\ -2)^T\ v_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^T$